

A dinâmica de transição e o crescimento econômico em um modelo neoclássico com capital humano

Jorge Cláudio Cavalcante de Oliveira Lima

<http://www.bndes.gov.br/bibliotecadigital>

A dinâmica de transição e o crescimento econômico em um modelo neoclássico com capital humano

Jorge Cláudio Cavalcante de Oliveira Lima*

Resumo

O modelo neoclássico de crescimento proposto por Solow (1956) ganhou grande aceitação por sua facilidade de compreensão e por permitir algumas prescrições de política econômica para a promoção do crescimento. King e Rebelo (1993) retomam a abordagem de Solow por meio de um modelo ampliado em que a dinâmica de transição gerada por esse modelo se mostra incompatível com as taxas de juros reais observadas nos períodos iniciais para alavancar o crescimento.

* Economista do BNDES e professor da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Correspondência para: Jorge Cavalcante, BNDES, Av. República do Chile, 100 – 1812 – Castelo – Rio de Janeiro – RJ – CEP: 20.031-917. *E-mail*: jorol@bndes.gov.br. Este artigo é de exclusiva responsabilidade do autor, não refletindo, necessariamente, a opinião do BNDES.

O artigo retoma essa problemática e mostra que, com a introdução do capital humano no modelo, é possível gerar taxas de juros reais compatíveis com as fases iniciais do crescimento observado em diversas economias, mantendo o crescimento exógeno.

Abstract

The neo-classical growth model proposed by Solow (1956) gained a lot of interest because of its easy comprehensiveness of the growth process and also because of some of its prescriptions in terms of promoting growth within an Economic Policy framework. King and Rebelo (1993) took this approach and extended it and they conclude that the transitional dynamics generated schedules for the marginal productivity of capital that were not observed in the beginning of the growth process. This paper revisits King and Rebelo and show that with the introduction of human capital it is possible to generate schedules for the marginal productivity of capital much more reasonable.

Introdução

A teoria do crescimento econômico procura explicar o comportamento de longo prazo da economia. O longo prazo significa que a atenção se prende à dinâmica da acumulação (da riqueza e dos fatores de produção) e negligencia as flutuações de curto prazo da economia (interação entre oferta e demanda), que é o objeto da análise macroeconômica. Em outros termos, a teoria do crescimento procura fornecer uma explicação rigorosa e formalizada para vários fatos observados no decorrer de um período muito longo.

Em um artigo que desde a sua publicação se revelou um clássico do estudo da teoria do crescimento, Solow (1956) expôs um modelo fundamental de acumulação de capital no longo prazo. O sucesso de seu modelo deve-se ao fato de que ele forneceu um quadro empírico que estimulou a pesquisa sobre as fontes e a natureza do crescimento econômico, o que permitiu a publicação de vários trabalhos de natureza quantitativa e toda espécie de simulação. O crescimento em um modelo neoclássico pode ocorrer por duas razões: a primeira delas diz que existe um crescimento de longo prazo associado ao crescimento da produtividade em razão do progresso tecnológico. A segunda razão é a existência de um crescimento de transição associado com o deslocamento de um estoque de capital inicial em direção ao estado estacionário. Para um estoque inicial de capital, digamos k_0 , converge-se de maneira monotônica para um valor estacionário único, como demonstrado por Solow. Mas, apesar do papel fundamental desempenhado pelo modelo de Solow, nada é dito sobre a velocidade de convergência do processo em direção ao equilíbrio estacionário. A convergência monotônica do modelo de Solow deixa aberta a questão da velocidade dessa dinâmica de transição. Chama-se de dinâmica de transição o efeito do crescimento do capital inicial em direção ao crescimento no estado estacionário.

No modelo de Solow, a poupança exerce um papel fundamental para alicerçar o crescimento econômico com o investimento em capital físico. Vários países, incluindo o Brasil, seguiram essa prescrição e entraram em uma fase de crescimento acelerado (que no Brasil culminou com o chamado “milagre econômico”). Em trabalho seminal, King e Rebelo (1993) concluíram que, geralmente, quando se tenta explicar o crescimento econômico com o modelo de Solow, a dinâmica de transição [Sato (1964)] gera implicações que não se sustentam com base nos fatos observados historicamente. Especificamente, nota-se que os produtos marginais implícitos para o capital físico são extremamente elevados nos estágios iniciais do processo de crescimento e sem registro histórico que sustente essa visão. Uma alternativa que poderia ser usada levaria a pensar na possibilidade de utilização dos modelos de crescimento endógeno como um caminho a ser explorado, mas com maior grau de complexidade.

Neste artigo, construiu-se uma pequena variante do modelo de base de King e Rebelo e mostrou-se que, com a introdução do capital humano, se pode gerar um comportamento para a taxa de juros real muito mais razoável, mas sem renunciar à modelagem do crescimento exógeno. King e Rebelo argumentam que a trajetória descrita durante a dinâmica de transição permanece pouco conhecida do ponto de vista quantitativo. Retoma-se a abordagem de King e Rebelo e estudam-se os resultados por eles apurados, com a ajuda do *software* GAMS/MINOS.¹ Mostra-se que a introdução do capital humano é uma alternativa engenhosa e pouco custosa para resolver alguns problemas por eles apontados. O artigo está organizado em cinco seções, além da introdução. A primeira seção faz uma rápida revisão de literatura, mostrando como o modelo de Solow se tornou conhecido nos meios acadêmicos, além de discutir o modelo de Sato (1964) e o modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (1956). A terceira seção descreve o modelo de base usado por King e

¹ MINOS é uma rotina que lida com programação não linear (NLP) e usa um algoritmo reduzido combinado com o método de Newton-Raphson (na realidade, quase-Newton).

Rebelo. A quarta seção modifica o modelo de base de King e Rebelo com a introdução do capital humano segundo a hipótese deste artigo, reporta os resultados da simulação, o procedimento de calibração dos parâmetros e algumas comparações entre os resultados deste trabalho e os obtidos por King e Rebelo. A quinta seção conclui com um resumo do trabalho e algumas outras observações sobre desenvolvimentos futuros possíveis.

Breve revisão de literatura sobre crescimento exógeno

O modelo de Solow

Solow trabalha com um modelo simples de crescimento, que King e Rebelo usam como referência para construir seu modelo de base e que depois é usado para desenvolver novas variantes mais ricas.

Solow supõe uma função de produção do tipo Cobb-Douglas com dois insumos agregados, o capital físico K que pode ser acumulado e o trabalho N que não pode ser acumulado.

$$Y_t = K_t^\beta N_t^\alpha \quad (1)$$

Os parâmetros α e β são positivos. O crescimento do estoque de capital ao longo do tempo, dk/dt , é o investimento agregado líquido que considera o efeito da depreciação do capital. Em uma economia fechada, o investimento líquido é igual à poupança. Solow supõe que a poupança é uma proporção fixa da renda nacional.

$$\dot{K} = sK_t^\beta N_t^\alpha - \delta K_t \quad (2)$$

Caso se defina a razão capital-trabalho ou, ainda, o estoque de capital por trabalhador como $k = K/N$ e derivando-se k em relação

ao tempo, pode-se reescrever (2) como sendo, depois de algumas manipulações algébricas:²

$$\dot{k} = sk_t^\beta N_t^{\alpha+\beta-1} - (\delta + \eta)k_t \quad (3)$$

Dividindo-se ambos os lados da relação (3) por k e definindo-se a taxa de crescimento do estoque de capital por trabalhador como ζ_k e chamando-se de estado estacionário a situação em que as variáveis crescem a uma taxa constante, ou seja, ζ_k é constante:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sk_t^\beta N_t^{\alpha+\beta-1}}{k_t} - \frac{(\delta + \eta)k}{k_t} = \zeta_k = sk_t^{\beta-1} N_t^{\alpha+\beta-1} - (\delta + \eta) \quad (4)$$

Tomando-se o logaritmo de ambos os lados da expressão e derivando com relação ao tempo:

$$\ln \zeta_k = \ln s + (\beta - 1) \ln k_t + (\alpha + \beta - 1) \ln N_t - \ln(\delta + \eta)$$

$$\frac{\partial \ln \zeta_k}{\partial t} = \frac{\partial \ln s}{\partial t} + (\beta - 1) \frac{\partial \ln k_t}{\partial t} + (\alpha + \beta - 1) \frac{\partial \ln N_t}{\partial t} - \frac{\partial \ln(\delta + \eta)}{\partial t}$$

$$0 = (\beta - 1)\zeta_k + \eta(\alpha + \beta - 1) \quad (5)$$

No artigo original de Solow (1956), a função de produção mostra rendimentos constantes de escala nos fatores capital e trabalho

² $\dot{K}_t = sK_t^\beta N_t^\alpha - \delta K_t \Rightarrow \frac{\dot{K}_t}{N_t} = \frac{sK_t^\beta N_t^\alpha - \delta K_t}{N_t^\beta N_t^{1-\beta}} \Rightarrow \frac{\dot{K}_t}{N_t} = sk_t^\beta N_t^{\alpha+\beta-1} - \delta k_t$

$\left(\frac{\dot{K}_t}{N_t}\right) = \dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t}{N_t} - k_t \eta \Rightarrow \dot{k}_t + k_t \eta = sk_t^\beta N_t^{\alpha+\beta-1} - \delta k_t \Rightarrow \dot{k}_t = sk_t^\beta N_t^{\alpha+\beta-1} - (\eta + \delta)k_t$

$(\alpha + \beta = 1)$, mas mostra rendimentos decrescentes no fator k ($\beta < 1$). Por essa razão, tem-se:

$$0 = (\beta - 1)\zeta_K \quad (6)$$

Mas, como $\beta < 1$, a igualdade (6) implica que a única taxa de crescimento sustentável no equilíbrio estacionário é $\zeta_k = 0$. Portanto, Solow supõe que a economia cresce por causa de fatores exógenos, ou seja, tem-se uma função de produção:

$$Y_t = A_t K_t^\beta N_t^\alpha$$

onde A_t reflete o nível de tecnologia que se supõe crescer a uma taxa g , ou seja, $A_t = A_0 e^{gt}$. O parâmetro g é chamado de taxa de crescimento exógena da produtividade. Portanto, com $\alpha + \beta = 1$, tem-se a dinâmica descrita pelo Gráfico 1 e sintetizada pela relação:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA k_t^{-(1-\beta)} - (\delta + \eta) \quad (7)$$

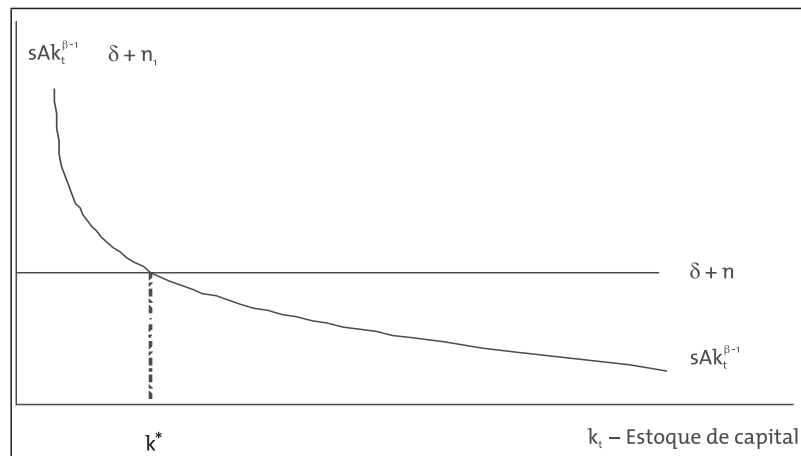
A função $(\delta + \eta)$ é independente de k e, portanto, é uma reta paralela ao eixo das abscissas. A função $sA k^{-(1-\beta)}$, por sua vez, decresce de forma monotônica com relação a k e se aproxima assintoticamente de 0.³ As duas curvas se cruzam no ponto k^* , a razão capital-trabalho no estado estacionário. Se for considerada uma economia com um pequeno estoque de capital k_0 menor que k^* , a taxa de crescimento será muito elevada (a distância entre as duas curvas), mas decrescente no passar do tempo.

³ $F = sA k_t^{-(1-\beta)} = \frac{sA}{k_t^{1-\beta}} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial k_t} = sA(\beta - 1)k_t^{\beta-2} < 0$

$\frac{\partial F^2}{\partial^2 k_t} = sA(\beta - 1)(\beta - 2)k_t^{\beta-3} > 0$

$\lim_{t \rightarrow \infty} F = 0$

Gráfico 1
Dinâmica do modelo de Solow



Fonte: Solow (1956).

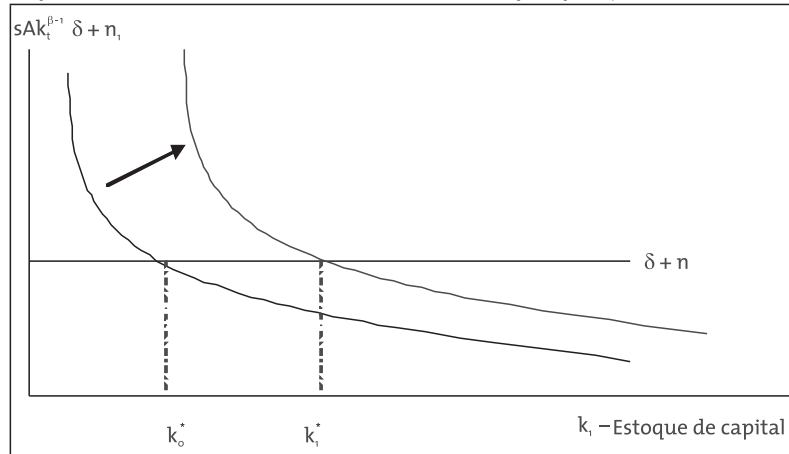
O experimento de Sato (1964)

Da relação (7), supondo que se esteja no estado estacionário e que de repente a taxa de poupança s aumente, o Gráfico 1 sugere que a curva $sAk^{-(1-\beta)}$ se deslocará para a direita e nada ocorrerá com a curva $(\delta + n)$. É o que pode ser visto no Gráfico 2.

No Gráfico 2, pode-se observar que a taxa de crescimento da economia aumenta imediatamente, mas será decrescente até que retorne ao valor zero (estado estacionário), com a relação capital por trabalhador mais elevada. O artigo de Sato descreve esse experimento (aumento de s) e se interessa em estudar a velocidade de convergência do processo. Segundo ele, há as seguintes hipóteses:

$$Y_t = A_t K_t^\beta N_t^\alpha \quad \text{com} \quad \alpha + \beta = 1 \quad A_t = A_0 e^{gt} \quad N_t = N_0 e^{nt} \quad \text{e} \quad \delta = 0 \quad (8)$$

Gráfico 2
Experimento de Sato (aumento da taxa de poupança)



Fonte: Sato (1964).

Aplicando-se o logaritmo natural e derivando-se (8) com relação ao tempo, tem-se:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \beta \frac{\dot{K}}{K} + \alpha \frac{\dot{N}}{N} \Rightarrow \varsigma_Y = g + \beta \frac{\dot{K}}{K} + \alpha \frac{\dot{N}}{N} = g + \beta \frac{\dot{K}}{Y} \cdot \frac{Y}{K} + \alpha \eta$$

$$\dot{K} = sY \text{ e } \frac{K}{Y} = k \Rightarrow \varsigma_Y = g + s \cdot \left(\frac{1}{k} \right) + \alpha \eta$$

Tomando-se a relação $K_t = k_t Y_t$ e derivando-a com relação ao tempo, tem-se:

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} + \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} \Rightarrow s \cdot \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{\dot{k}_t}{k_t} + g + \beta \cdot s \cdot \left(\frac{1}{k_t} \right) + \alpha n$$

da qual se pode obter, caso se multiplique tudo por k_t :

$$\begin{aligned} s &= \dot{k}_t + gk_t + \beta.s + \alpha nk_t \Rightarrow \\ \dot{k}_t &= s - \beta.s - gk_t - \alpha nk_t = s(1 - \beta) - (g + \alpha\eta)k_t \end{aligned}$$

Mas, lembrando-se que $\alpha = 1 - \beta$:

$$\dot{k}_t = s\alpha - (g + \alpha\eta)k_t \quad (9)$$

Resolvendo-se essa equação diferencial, obtém-se:

$$k_t = \frac{s\alpha}{(g + \alpha\eta)} + Ce^{-(g + \alpha\eta)t} \quad (10)$$

onde C é uma constante. Caso se queira exprimir essa relação em função da relação capital-produto, $v = Y/K$ ou l/k , tem-se:

$$v_t = \frac{g + \alpha\eta}{\alpha(s + Be^{-(g + \alpha\eta)t})} \quad (11)$$

Assim, caso se designe s_0 e s_1 e como sendo a taxa de poupança antes e depois do seu aumento, respectivamente, e v_0^* e v_1^* como as respectivas relações capital-produto associadas a s_0 e s_1 , pode-se escrever que $B = s_0 - s_1$ e assim pode-se reescrever (11) como sendo:

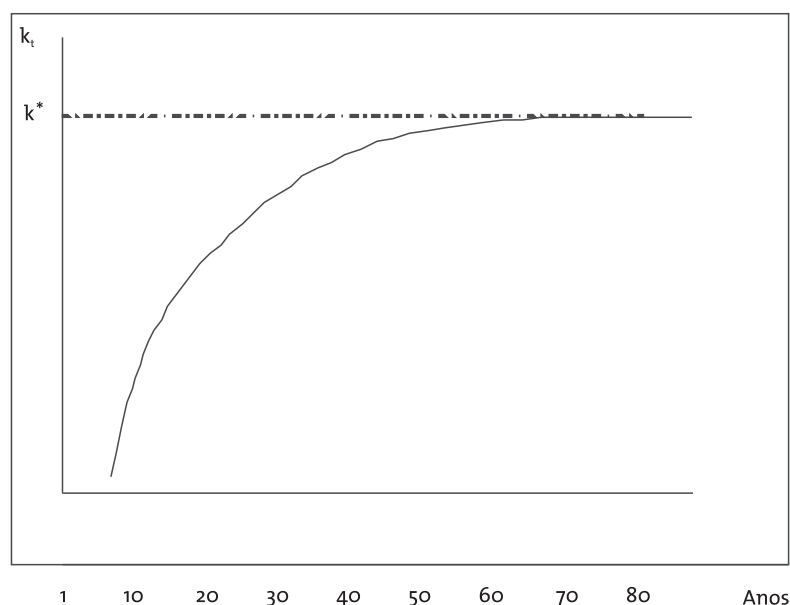
$$v_t = \frac{g + \alpha\eta}{\alpha(s + (s_0 - s_1)e^{-(g + \alpha\eta)t})} \quad (12)$$

Supondo-se que o instante t_k mostra o percentual k de ajustamento em relação ao ajustamento total já alcançado até esse instante, tem-se:

$$e^{(g + \alpha\eta)t_k} = 1 + \frac{s_0 k}{s_1(1 - k)} \Rightarrow t_k = \frac{\log(1 + s_0 k / s_1(1 - k))}{g + \alpha\eta} \quad (13)$$

Dessa expressão, se a taxa de poupança aumenta de 11,55 para 12,54, para atingir 10% do ajustamento total, são necessários quatro anos, para atingir 50% de ajustamento, 30 anos, para 70% de ajustamento, noventa anos, e para 90% de ajustamento, cem anos, ou seja, o ajustamento seria realmente bastante lento. O experimento de Sato pode ser visto no Gráfico 3. Mostra-se também que se pode interpretar o experimento de Sato como um choque no qual o estoque de capital é reduzido em relação ao estado estacionário (Gráfico 2), exceto que nesse caso não haveria uma mudança no estoque do capital estacionário, ao passo que uma mudança de s implica um novo valor de k^* . Esse é o tipo de experimento que fazem King e Rebelo (1993).

Gráfico 3
Dinâmica do estoque de capital baseado no experimento de Sato



Fonte: Sato (1964).

O modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Nos modelos precedentes, não havia hipótese de otimização, e é isso que distingue esses modelos do modelo de Ramsey-Cass-Koopmans examinado nesta seção.

Os consumidores escolhem uma sequência de consumos futuros de forma a maximizar a soma descontada da utilidade futura de cada um dos períodos:⁴

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(C_t) N_t dt = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} N_t dt \quad (14)$$

Também existe uma restrição que deve ser respeitada e que mostra que a quantidade de recursos existentes na sociedade deve ser satisfeita, ou seja:

$$\dot{K}_t = F(K_t, N_t) - C_t - \delta K_t$$

onde $F(\cdot)$ é uma função homogênea de grau 1 e satisfaz as propriedades de uma função de produção neoclássica padrão ($F'(\cdot) > 0$ e $F''(\cdot) < 0$). Pode-se reescrever a restrição do PIB em termos *per capita* como sendo:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - \eta k_t - \delta k_t$$

onde se supõe que a função $f(k)$ respeita as condições de Inada.⁵ Portanto, o problema de maximização consiste em:

⁴ Nesses modelos, não há incerteza, e as previsões são perfeitas e sinônimo de expectativas racionais.

⁵ $f(0) = 0$; $f'(0) = \infty$; $f'(\infty) = 0$.

$$\begin{aligned} & \text{Max} \int_0^{\infty} e^{-(\rho-\eta)t} U(c_t) dt \\ & \text{sujeito a } \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - \eta k_t - \delta k_t \\ & k_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

Por meio da teoria do controle ótimo e de técnicas de otimização, pode-se escrever o sistema hamiltoniano e derivar as condições de primeira ordem do problema:

$$H(.) = e^{-(\rho-\eta)t} \left(\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right) + \lambda [f(k_t) - c_t - \eta k_t - \delta k_t]$$

onde λ é o multiplicador da restrição e o *shadow price* do investimento. As condições de primeira ordem podem ser obtidas:

$$H_c = 0 \Rightarrow e^{-(\rho-\eta)t} c^{-\sigma} = \lambda \quad (15)$$

$$H_k = -\dot{\lambda} \Rightarrow \dot{\lambda} = -\lambda(f'(k) - \eta - \delta) \quad (16)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_t \lambda_t = 0 \quad (17)$$

De (15) e (16), pode-se escrever que:⁶

⁶ Se for calculado o logaritmo natural de (15), tem-se que:

$$-(\rho-\eta)t - \sigma \ln(c_t) = \ln \lambda, \text{ derivando em relação ao tempo :}$$

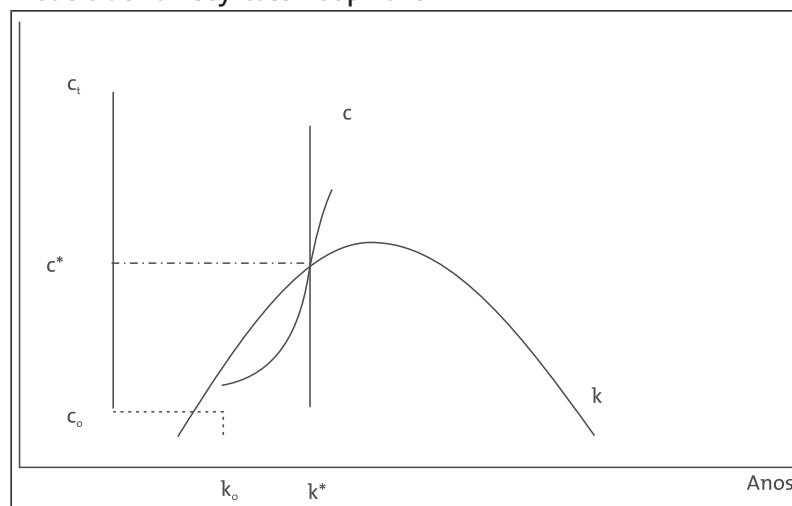
$$-(\rho-\eta) - \sigma \left(\frac{\dot{c}}{c} \right) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = \sigma^{-1} \left(-\rho + \eta - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma^{-1} (-\rho + \eta + f'(k) - \eta - \delta) \text{ de (16)} \Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = \sigma^{-1} (-\rho + f'(k) - \delta)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma^{-1}(-\rho + f'(k) - \delta)$$

Pode-se visualizar a dinâmica de transição oriunda desse modelo no Gráfico 4. Caso a economia se encontre no ponto (c_o, k_o) , converge-se em direção a k^* . Durante essa trajetória, o capital *per capita* cresce, mas a taxa decrescente e será zero no equilíbrio estacionário. À medida que a relação capital-trabalho cresce, a produtividade marginal do capital decresce e cai a taxa de juros real. Mas resta ainda o problema da dinâmica de transição, que é absurdamente longa.

Gráfico 4
Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans



Fonte: Elaboração própria.

O modelo de base

Além dos modelos subjacentes à análise do problema já vistos aqui, mostra-se também o modelo que King e Rebelo utilizam e que é a

referência principal deste artigo. O modelo considerado é um modelo totalmente padrão, de inspiração neoclássica e com um único setor.

Descrição da economia

A função de produção

Existe somente um bem na economia que pode ser consumido ou investido. Esse bem é produzido por meio de uma função de produção que mostra rendimentos constantes de escala e que é dada por:

$$Y_t = A_t F(K_t, X_t N_t) \quad (18)$$

Nessa relação, Y é o produto, K o capital físico e N o insumo trabalho. Pode haver variações temporárias no fator de produtividade total A , mas as variações tecnológicas permanentes são restritas à produtividade do trabalho Nt .⁷ Dentro do arcabouço do modelo neoclássico, o bem pode ser consumido ou investido. Portanto, a dinâmica do estoque de capital pode ser escrita em termos discretos como:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \quad (19)$$

onde I é o investimento bruto e δ é a taxa de depreciação do capital físico. Também existe a restrição dada pelo PIB, que diz que os usos totais dos bens devem ser iguais ao PIB:

⁷ A introdução de um progresso tecnológico como (18) é expressa como um progresso técnico aumentativo no trabalho – *labor augmenting*. Na realidade, $Y = F(K, N, t) = G(b(t), a(t)N)$, onde G é homogênea de grau 1. Por definição, o progresso técnico é puramente aumentativo no trabalho se $b(t) = 0$ e $a(t) > 0$. Pode ser mostrado que, para que um equilíbrio estacionário seja possível, é necessário que o progresso técnico permanente seja expresso como aumentativo no trabalho, o que justifica essa especificação. Mais especificamente, uma condição necessária e suficiente para que exista um estado estacionário de equilíbrio é que o progresso técnico seja neutro no sentido de Harrod, ou aumentativo de trabalho. Chama-se $b(t)K_t$ o estoque de capital medido em unidades de eficiência (efetivo no capital), enquanto $a(t)N_t$ se chama de trabalho medido em unidades de eficiência.

$$C_t + I_t = Y_t \quad (20)$$

Também se pode definir a taxa de crescimento do trabalho e da produtividade do capital físico como sendo respectivamente:

$$N_t = \varsigma_N N_{t-1} \quad \text{onde} \quad \varsigma_N - 1 = \frac{(N_t - N_{t-1})}{N_{t-1}} \quad (21)$$

$$K_t = \varsigma_K K_{t-1} \quad \text{onde} \quad \varsigma_K - 1 = \frac{(K_t - K_{t-1})}{K_{t-1}} \quad (22)$$

Para a poupança, existem duas especificações possíveis:

- a) seguindo a linha de Solow-Sato, em que a poupança é uma fração da renda e fixada de forma exógena e s é a taxa de poupança;

$$I_t = sY_t + \delta Y_t \quad (23)$$

- b) seguindo a especificação de Ramsey-Cass-Koopmans, em que a taxa de poupança é determinada por um comportamento ótimo de um consumidor representativo que escolhe uma sequência de consumos futuros ótimos. King e Rebelo trabalham com a especificação seguinte para a função de utilidade:

$$U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M_{t+j}^{\nu} U \left(\frac{C_{t+j}}{M_{t+j}} \right) \quad (24)$$

Nessa especificação, β é a taxa de desconto intertemporal das utilidades futuras e está compreendida entre 0 e 1, M é o número de membros da família e ν é um parâmetro que reflete a avaliação dos membros futuros da família⁸ e:

⁸ King e Rebelo (1993) justificam a escolha dessa forma funcional dizendo que se deve impor uma restrição sobre as preferências porque a elasticidade intertemporal de substituição do consumo deve ser invariante em relação à escala de consumo. Isso decorre do fato de que o produto marginal do capital $PMG_K = l + r$ no equilíbrio e deve ser constante no equilíbrio estacionário. Como o consumo cresce a uma taxa constante e a razão das utilidades marginais descontadas $= l + r$, a elasticidade intertemporal de substituição deve ser constante e independente do consumo.

$$U(C_t) = \begin{cases} \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}, & \text{para } 0 < \sigma \text{ ou } \sigma > 1 \\ \log(C_t), & \text{para } \sigma = 1 \end{cases}$$

Com relação à oferta de trabalho, considera-se que cada membro da população oferece um número fixo de horas tal que $N_t = n.M_t$.

Estimação do modelo de Solow-Sato – procedimento usado

Supõe-se inicialmente uma função de produção do tipo Cobb-Douglas:⁹

$$Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} (N_t X_t)^\alpha \quad (25)$$

onde $N_t X_t$ é o trabalho medido em termos de unidades de eficiência. Como a variação em A é temporária, pode-se, sem perda de generalidade, normalizá-lo a 1. Isso leva em consideração o fato de que o que interessa é o estado estacionário, isto é, o longo prazo. Utiliza-se o *software* GAMS (General Algebraic Modelling System) com o *solver* MINOS para simular o modelo de Solow-Sato. Para tanto, o procedimento compreende três passos:

- 1) resolução analítica do problema;
- 2) calibração dos parâmetros do modelo; e
- 3) resolução numérica do modelo com GAMS.

⁹ Pode-se notar que, quando se trabalha com uma função de produção do tipo Cobb-Douglas, os dois tipos de progresso técnico (neutro no sentido de Harrod e neutro no sentido de Hicks) são idênticos.

No experimento de Solow-Sato, a resolução do modelo é bastante simples e consiste em combinar as relações (18), (19), (20), (21), (22) e (23), de onde se pode tirar:

$$K_{t+1} - K_t = sK_t^{1-\alpha} (N_t X_t)^\alpha - \delta K_t$$

Caso se estude uma economia transformada em que cada variável é dividida por $M_t X_t$ de tal forma que $k_t = K_t/M_t X_t$, $y_t = Y_t/M_t X_t$ etc..., obtém-se:¹⁰

$$\frac{K_{t+1}}{M_{t+1}} \frac{M_{t+1}}{X_{t+1}} \frac{X_{t+1}}{M_t X_t} - \frac{K_t}{M_t X_t} = s \left(\frac{K_t}{M_t X_t} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{N_t X_t}{M_t X_t} \right)^\alpha - \delta \frac{K_t}{M_t X_t}$$

$$k_{t+1} \zeta_X \zeta_N - k_t = s k_t^{1-\alpha} n^\alpha - \delta k_t \quad (26)$$

O procedimento adotado para a calibração dos parâmetros do modelo segue uma lógica simples. Com base em dados retirados de King e Rebelo, o equilíbrio estacionário inicial pode ser derivado de (26).

$$k^* \zeta_X \zeta_N - k^* = s k^{*1-\alpha} n^\alpha - \delta k^* \Rightarrow k^*$$

$$(\zeta_X \zeta_N - (1 - \delta)) = s k^{*1-\alpha} n^\alpha \Rightarrow k^* = \left[\frac{s n^\alpha}{\zeta_X \zeta_N - (1 - \delta)} \right]^{1/\alpha} \quad (27)$$

Com base nos valores dos parâmetros de King e Rebelo (baseados no trabalho de Sato), $s = 0,12$, $\alpha = 2/3$, $\zeta_X = 1,4\%$ e $\zeta_N = 1,024\%$ e $\delta = 0,10$,¹¹ esses valores implicam um valor para k^* de 0,167. A convergência de (26) pode ser facilmente vista por meio de uma ligeira transformação (desconsiderando-se ζ_X e ζ_N , que são constantes):

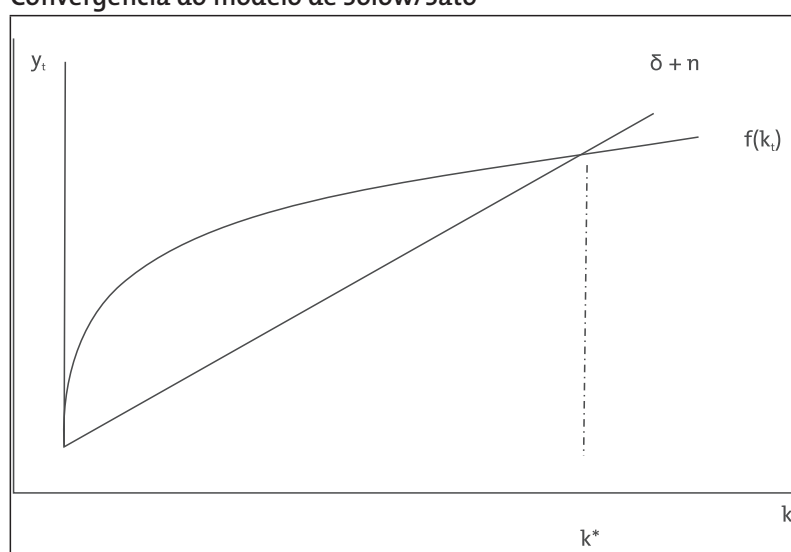
$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = s k_t^{-\alpha} n^\alpha + (1 - \delta) \quad (26')$$

¹⁰ Note-se que $N_t = nM_t$ e assim $N_t X_t / M_t X_t = e$ $M_{t+1} / M_t = nN_{t+1} / nN_t = N_{t+1} / N_t = \zeta_N$.

¹¹ Na realidade, Sato não trabalha com a depreciação em seu estudo e King e Rebelo nada dizem sobre o valor de η .

Se $k_0 < k^*$, $k_{t+1} > k_t$, o que implica que no instante seguinte k vai aumentar.¹² De forma contrária, se $k_0 > k^*$, $k_{t+1} < k_t$, o que implica que no instante seguinte k vai diminuir. A convergência pode ser visualizada no Gráfico 5.

Gráfico 5
Convergência do modelo de Solow/Sato



Fonte: Elaboração própria.

Nesse momento, é possível realizar o experimento desejado. Supõe-se, inicialmente, que a economia esteja no estado estacionário dado por (27). Perturba-se esse equilíbrio com um choque em $t = 0$ e o resultado é que a economia não estará mais em equilíbrio e o estoque

¹² Podem-se calcular as derivadas primeira e segunda:

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{s(1-\alpha)k_t^{-\alpha}\eta^\alpha + 1 - \delta}{s_N s_X} > 0$$

$$\frac{\partial^2 k_{t+1}}{\partial k_t^2} = \frac{-s(1-\alpha)\alpha k_t^{-\alpha-1}\eta^\alpha}{s_N s_X} < 0$$

de capital deve se ajustar de forma que o equilíbrio seja atingido novamente. Mas, em vez de se concentrar sobre um choque sobre a taxa de poupança (o que muda o equilíbrio estacionário), King e Rebelo supõem que o choque é dado sobre o estoque de capital inicial k_0 (o que não altera o equilíbrio estacionário). O estoque de capital inicial é um dado fundamental para o problema e foi fixado de tal forma que o produto no instante inicial seja equivalente a 50% do nível do estado estacionário.¹³ Portanto, o modelo foi calibrado para as variáveis no estado estacionário e em seguida fixou-se k_0 a um nível equivalente a 12,5% do nível do estado estacionário. Ora, a relação (26) deve ser válida para todos os instantes, ou seja, para $t = 1, 2, 3, \dots$

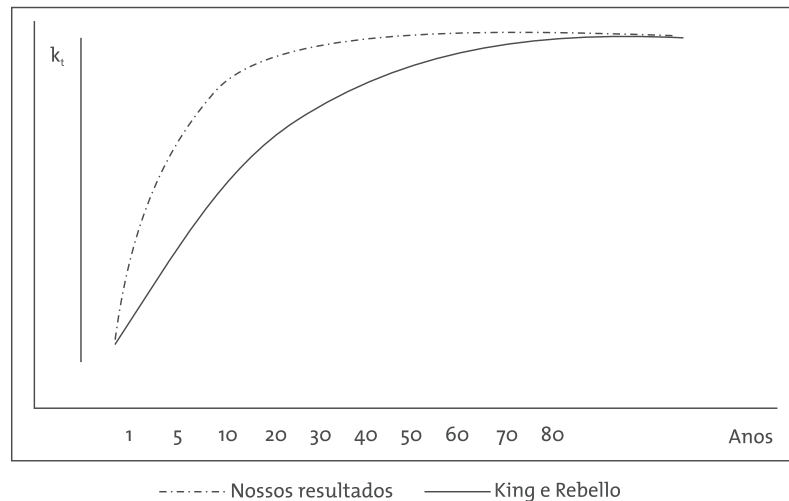
Isso leva a um sistema de equações a diferenças e, portanto, utiliza-se GAMS para resolvê-lo. Os resultados deste trabalho não são iguais aos obtidos por King e Rebelo, como pode ser visto no Gráfico 6, e se parecem mais com o resultado obtido por Sala-i-Martin (1990), em que o modelo previa que a diferença entre k_0 e k^* desapareceria em pouco mais do que seis anos. Trabalha-se também com a hipótese de não haver depreciação, o que torna a convergência mais lenta e aumenta a duração da dinâmica de transição, conforme observado por Sato.

¹³ Como $Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} N_t^\alpha$, onde $A_t = 1$ por efeito de normalização, pode-se transformar a função de produção:

$$\frac{Y_t}{M_t X_t} = \frac{K_t^{1-\alpha}}{M_t X_t^{1-\alpha}} \frac{(N_t X_t)^\alpha}{X_t^\alpha} \Rightarrow y_t = F(k_t, n) = k_t^{1-\alpha} n^\alpha$$

De onde se pode achar que $y^* = 0,188$. Portanto $0,50 y^* = 0,094$, que é o valor de y_0 e isso permite encontrar o valor de k_0 , pois $k_0^{1/3} n^\alpha = 0,094$ e de lá tirar que $k_0 = 12,5\% k^*$.

Gráfico 6
Modelo de Solow-Sato – resultados do artigo x King e Rebelo



Fonte: Elaboração própria.

Estimação do modelo de Ramsey-Cass-Koopmans – procedimento usado

Como sublinhado anteriormente, outra possibilidade é que a taxa de poupança seja endógena e decorra das escolhas ótimas dos consumidores ao longo de um horizonte de tempo. Como é a trajetória de consumo que decorre da otimização intertemporal, deve-se considerar que o estoque de capital e seu *shadow price* evoluem no tempo, como é padrão nesse tipo de modelo. Mas, como se trabalha neste artigo com um modelo em tempo discreto, chega-se a um sistema de equações a diferenças no estoque de capital e no *shadow price* do capital. King e Rebelo escolheram o método de resolução numérica chamada de *shooting* para resolver esse sistema.¹⁴

¹⁴ Esse tipo de problema é chamado de *two boundary value problems* e é caracterizado pelo fato de que as equações diferenciais devem satisfazer as condições extremas para mais que um valor

O método-padrão para analisar esse tipo de modelo com crescimento no estado estacionário consiste em transformar a economia de tal forma que a dinâmica seja mais fácil de ser estudada. No contexto desse modelo aqui considerado, a transformação consiste em dividir todas as variáveis do sistema por $M_t X_t$ de tal forma que todas as variáveis são transformadas, assim $k_t = K_t/M_t X_t$, $y_t = Y_t/M_t X_t$ etc. Essa economia transformada é idêntica a uma economia simples sem crescimento, exceto pela equação de acumulação de capital, que mudará assim como a taxa de preferência efetiva (por causa da transformação no consumo e, por conseguinte, na poupança). Segundo o método utilizado, resolve-se analiticamente o problema e encontram-se as condições de primeira ordem. Trabalha-se com as relações (18), (19), (20), (21), (22) e (24), de onde se pode tirar:

$$\begin{aligned} U_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M_t^\nu U \left(\frac{C_t}{M_t} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M_t^\nu \frac{1}{1-\sigma} \left(\frac{C_t}{M_t} \right)^{1-\sigma} = \\ &= \beta^0 M_0^\nu \frac{1}{1-\sigma} \left(\frac{C_0}{M_0} \right)^{1-\sigma} + \beta^1 M_1^\nu \frac{1}{1-\sigma} \left(\frac{C_1}{M_1} \right)^{1-\sigma} + \\ &+ \beta^2 M_2^\nu \frac{1}{1-\sigma} \left(\frac{C_2}{M_2} \right)^{1-\sigma} + \beta^3 M_3^\nu \frac{1}{1-\sigma} \left(\frac{C_3}{M_3} \right)^{1-\sigma} + \\ &+ \beta^4 M_4^\nu \frac{1}{1-\sigma} \left(\frac{C_4}{M_4} \right)^{1-\sigma} + \dots \end{aligned}$$

da variável independente. Escolhem-se os valores para todas as variáveis dependentes em um extremo. Integra-se a equação diferencial em direção ao outro extremo até que esse seja atingido. Observa-se a diferença em relação ao valor desejado. Utiliza-se essa informação para atualizar o valor de partida e se procede novamente de forma iterativa. Portanto, tem-se um problema multidimensional de onde se podem achar as raízes. O procedimento é repetido diversas vezes e se utiliza cada "tiro" (*shooting*) para melhorar a tentativa anterior. As preferências são côncavas, a tecnologia é convexa e, portanto, há um só equilíbrio e uma só trajetória ótima.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\sigma} \left[\beta^0 M_0^\nu X_0^{1-\sigma} \left(\frac{C_0}{M_0 X_0} \right)^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^1 M_1^\nu X_1^{1-\sigma} \left(\frac{C_1}{M_1 X_1} \right)^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^2 M_2^\nu X_2^{1-\sigma} \left(\frac{C_2}{M_2 X_2} \right)^{1-\sigma} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{1-\sigma} \left[\beta^0 M_0^\nu X_0^{1-\sigma} c_0^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^1 M_1^\nu X_1^{1-\sigma} c_1^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^2 M_2^\nu X_2^{1-\sigma} c_2^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^3 M_3^\nu X_3^{1-\sigma} c_3^{1-\sigma} + \dots \right] \\
&= M_0^\nu \frac{X_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} \left[\beta^0 c_0^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^1 \left(\frac{M_1}{M_0} \right)_1^\nu \left(\frac{X_1}{X} \right)^{1-\sigma} c_1^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^2 \left(\frac{M_1}{M_0} \right)_1^\nu \left(\frac{X_2}{X} \right)^{1-\sigma} c_2^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^3 \left(\frac{M_3}{M_0} \right)_1^\nu \left(\frac{X_3}{X} \right)^{1-\sigma} c_3^{1-\sigma} + \dots \right] \\
&= M_0^\nu \frac{X_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} \left[\beta^0 c_0^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^1 \zeta_N^\nu \zeta_X^{1-\sigma} c_1^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^2 \left(\zeta_N^2 \right)^\nu \left(\zeta_X^2 \right)^{1-\sigma} c_2^{1-\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + \beta^3 \left(\zeta_N^3 \right)^\nu \left(\zeta_X^3 \right)^{1-\sigma} c_3^{1-\sigma} + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$= M_0^\nu \frac{X_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} \left[\beta_*^0 c_0^{1-\sigma} + \beta_*^1 c_1^{1-\sigma} + \right. \\ \left. + \beta_*^2 c_2^{1-\sigma} + \beta_*^3 (\zeta_N^3)^\nu (\zeta_X^3)^{1-\sigma} c_3^{1-\sigma} + \dots \right] = \\ = M_0^\nu X_0^{1-\sigma} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_*^j \frac{1}{1-\sigma} [c_t]^{1-\sigma} \quad \sigma > 0 \text{ ou } \sigma < 1$$

e

$$U_t = M_o^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \beta_*^j [\log C_j + \log X_j] \quad , \quad \sigma = 1$$

onde

$$\beta_* = \zeta_N^\nu \zeta_X^{1-\sigma} < 1$$

Essa condição é para assegurar que a utilidade não seja infinita. O problema consiste em maximizar as utilidades anteriormente citadas, dependendo do valor assumido por σ , respeitando-se a seguinte restrição do PIB:

$$k_{t+1} \zeta_N \zeta_X - k_t + c_t = k_t^{1-\alpha} n^\alpha - \delta k_t$$

Pode-se então escrever o lagrangeano do problema como sendo:¹⁵

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_*^j U(C_{t+j}) + \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_{t+j} \\ \left[F_t(k_{t+j}, n) - c_{t+j} + (1-\delta)k_{t+j} - \zeta_N \zeta_X k_{t+j+1} \right]$$

É conveniente definir o multiplicador de lagrange descontado λ_t como sendo $\lambda_t = \Lambda_t / (\beta^*)^t$ e assim reescrever a relação como sendo:

¹⁵ $K_{t+1} - K_t + \delta K_t + C_t = K_t^{1-\alpha} (N_t X_t)^\alpha$
 $\frac{K_{t+1}}{M_{t+1} X_{t+1}} \cdot \frac{M_{t+1} X_{t+1}}{M_t X_t} - \frac{K_t}{M_t X_t} + \delta \frac{K_t}{M_t X_t} = \frac{K_t^{1-\alpha} (N_t X_t)^\alpha}{M_t X_t}$
 $k_{t+1} \zeta_N \zeta_X - k_t + \delta k_t + c_t = k_t^{1-\alpha} n^\alpha = F(k_t, n)$

$$\begin{aligned}
L = & U(c_t) + \beta_* U(c_{t+1}) + \beta^2_* U(c_{t+2}) + \dots \\
& + \lambda_t \left[F_t(k_t, n) - c_t + (1 - \delta)k_t - \varsigma_N \varsigma_X k_{t+j+1} \right] \\
& + \lambda_{t+1} \left[F_{t+1}(k_{t+1}, n) - c_{t+1} + (1 - \delta)k_{t+1} - \varsigma_N \varsigma_X k_{t+2} \right] + \dots
\end{aligned}$$

Dessa relação, podem-se obter as condições de primeira ordem do problema:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = U'(c_t) - \lambda_t = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = F_t(k_t, n) - c_t + (1 - \delta)k_t - \varsigma_N \varsigma_X k_{t+1} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t \varsigma_N \varsigma_X + \beta_* \lambda_{t+1} \left[\frac{\partial F_{t+1}}{\partial k_{t+1}}(k_{t+1}, n) + (1 - \delta) \right] = 0 \quad (30)$$

Essas condições permitem obter as equações dinâmicas para o capital e seu *shadow price*.¹⁶

$$c_t^{-\sigma} = \lambda_t \quad (31)$$

$$F_t(k_t, n) - c_t + (1 - \delta)k_t = \varsigma_N \varsigma_X k_{t+1} \quad (32)$$

$$\lambda_t \varsigma_N \varsigma_X = \beta_* \lambda_{t+1} \left[\frac{\partial F_{t+1}}{\partial k_{t+1}}(k_{t+1}, n) + (1 - \delta) \right] \quad (33)$$

¹⁶ Como a função de utilidade é do tipo CRRA, tem-se que:

$$U'(c_t) = (1 - \sigma) \frac{c_t^{1-\sigma-1}}{1 - \sigma} = c_t^{-\sigma}$$

As equações (31), (32) e (33) mais a condição terminal expressa pela condição de transversalidade seguinte:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\beta_*)^t \lambda_t k_{t+1} = 0$$

devem ser verificadas para $t = 0, 1, \dots, \infty$. O estoque de capital inicial, k_0 , é predeterminado e a condição de transversalidade deve ser satisfeita. Tem-se assim um sistema de equações com t variando de 0 a ∞ e pode-se usar GAMS para resolver o modelo.

A calibragem do modelo

O procedimento seguido para a calibração dos parâmetros do modelo segue uma lógica relativamente simples. A calibração é a descrição de como foram atribuídos os valores para os parâmetros que descrevem a tecnologia, as preferências etc. Os dados tirados do estudo de King e Rebelo são os seguintes: a participação da mão de obra no valor adicionado, $\alpha = 2/3$; o número de horas que cada membro da população consagra à produção, $n = 0.2$; a taxa de depreciação, $\delta = 0.10$; a taxa de crescimento da mão de obra, $\zeta_N = 1.024\%$; e a taxa de juros real no estado estacionário que se supõe igual a 6,5% a.a. como King e Rebelo. Sabe-se que no estado estacionário a produtividade marginal do capital deve satisfazer a condição seguinte: $PMG_k - \delta = r^*$, onde r^* é a taxa de juros real no estado estacionário. De lá, pode-se obter o estoque de capital no estado estacionário k^* , pois:

$$\left[(1 - \alpha) k^{*2/3} n^{2/3} - \delta \right] = r^* \quad \text{e assim}$$

$$k^* = \left(\frac{r^* + \delta}{(1 - \alpha) n^{2/3}} \right)^{3/2} = 0,574$$

Da mesma forma, pode-se obter o valor de β_* que vem da relação anteriormente exposta:

$$\beta_* = \zeta_N^\nu \zeta_X^{1-\sigma} = 0,9629 < 1$$

Da equação (29) reescrita, obtém-se o valor do consumo no estado estacionário c^* :

$$F_t(k^*, n) - c^* + (1 - \delta)k^* = \zeta_N \zeta_X k^*$$

Finalmente, da equação (28), obtém-se o *shadow price* λ_t :

$$c_*^{-\sigma} = \lambda_t = 4,713$$

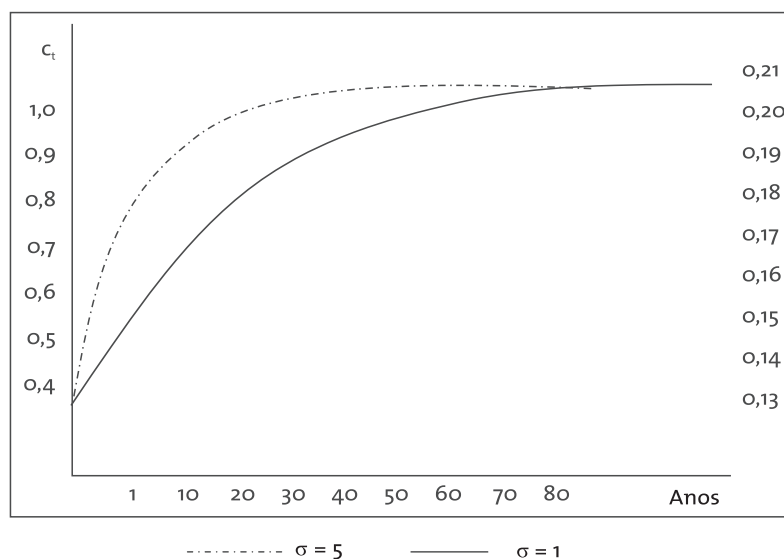
Também se pode achar o valor do produto no estado estacionário y^* , pois $y^* = k^{*1/3} = 0,284$. O capital inicial foi escolhido de forma que $F(k_0, 1)/(F(k^*, 1)\zeta_X^{100}) = 1/7$ e achou-se $y_0 = 0,126$, o que implica que $k_0 = 0,00585$. O valor de $\zeta_X = 1,4\%$ é a solução para $\zeta_X = 4$, que é o crescimento da produtividade durante cem anos.

Suponha-se que a economia se encontre no instante inicial no equilíbrio estacionário descrito e de repente no instante $t = 0$ o estoque de capital seja reduzido. O resultado é que a posição daí derivada não é mais um equilíbrio, e o *software* GAMS vai procurar a solução maximizando a função utilidade intertemporal objetivo, respeitando as restrições antes apresentadas. Já foi resolvido o sistema de forma analítica e, como se tem as condições de primeira ordem sendo um sistema de equações, GAMS vai resolver o problema para um período de 100 anos que satisfaz essas restrições para cada período t e mais a condição de transversalidade. Os gráficos 7, 8, 9 e 10 mostram a dinâmica de transição do modelo neoclássico quando se trabalha como uma função de utilidade logarítmica. Mostra-se o consumo (Gráfico 7), o estoque de capital *per capita* (Gráfico 8), o produto (Gráfico 9) e a taxa de juros real (Gráfico 10). Todas as variáveis foram deflacionadas por X e os valores no equilíbrio estacionário foram normalizados à unidade. O consumo cresce de forma monotônica, mas a uma taxa decrescente. Esse resultado é esperado do ponto de

vista analítico quando se trabalha com uma função do tipo CRRA (*constant relative risk aversion*) com elasticidade constante (não há incerteza no modelo). A velocidade de convergência é bastante rápida, contradizendo o que se esperava.

No início, a taxa de crescimento do produto (Gráfico 9) é elevada, mas depois se reduz. Finalmente, o valor implicado para a taxa de juros real (Gráfico 10) é bastante elevado, por volta de 40% a.a. Esse fato traduz o rendimento decrescente em relação ao fator que se acumula (capital físico) e diz que, para financiar o crescimento, a taxa de juros real deveria ser de 40% a.a. no início do processo. Esse fato é um elemento-chave no modelo neoclássico. Como uma taxa de juros real de 40% a.a. parece desmesurada, em relação à experiência internacional, foram tentadas algumas variações dos parâmetros do modelo.

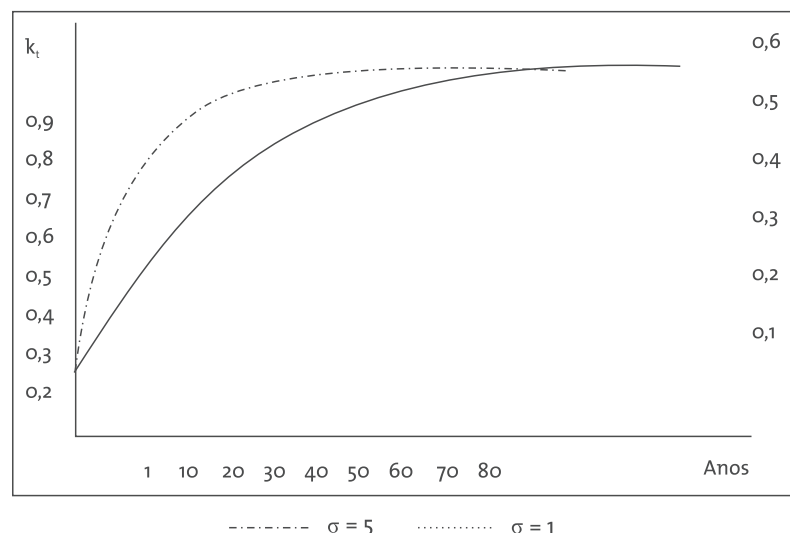
Gráfico 7
Modelo de base – consumo



Fonte: Elaboração própria.

A velocidade de convergência da dinâmica de transição pode ser reduzida de maneira considerável se for diminuída a elasticidade de substituição intertemporal do consumo ($1/\sigma$). Os mesmos gráficos 7, 8, 9 e 10 descrevem a dinâmica de transição para o caso em que a elasticidade de substituição é $\sigma = 5$, com a escala devendo ser lida no lado direito do gráfico. Essa diminuição do grau de substituição torna o processo mais lento, mas a taxa de juros real permanece ainda muito alta: em vez de 38% a.a. ($\sigma = 1$), passa a ser de 28% a.a. ($\sigma = 5$).

Gráfico 8
Modelo de base – estoque de capital

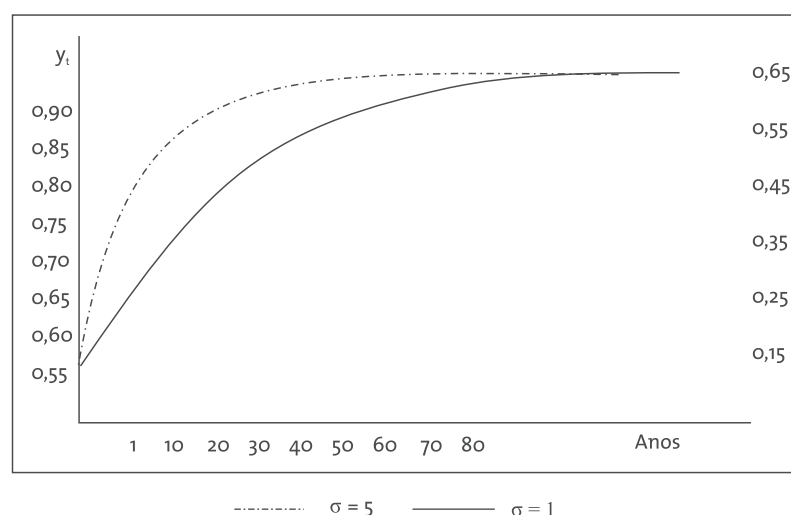


Fonte: Elaboração própria.

Também se considerou uma elevação na participação do capital físico aumentando α de $1/3$ para $0,5$, mas tal mudança não alterou as conclusões qualitativas do modelo com a taxa de juros real ainda muito elevada, embora essa seja ligeiramente mais baixa do que o caso em que σ é igual a 5. Chegou-se, pois, à conclusão de que a taxa de juros real é muito elevada no início dos anos 1900 se for

considerado o modelo neoclássico. King e Rebelo utilizam esse fato para dizer que o crescimento exógeno é de pouca utilidade para a explicação do crescimento econômico observado. Considerou-se ainda a possibilidade de trabalhar com uma função de produção mais geral como a função do tipo ESC (elasticidade de substituição constante) com $\rho = 0,5$ (parâmetro de substituição). Nesse caso, a taxa de juros real ainda permanece elevada, sendo até mais elevada do que o modelo de base original. Portanto, a conclusão inicial é que, ainda que se alterem os parâmetros do modelo, as taxas de juros reais permanecem absurdamente altas nos períodos iniciais do crescimento econômico.¹⁷

Gráfico 9
Modelo de base – produção



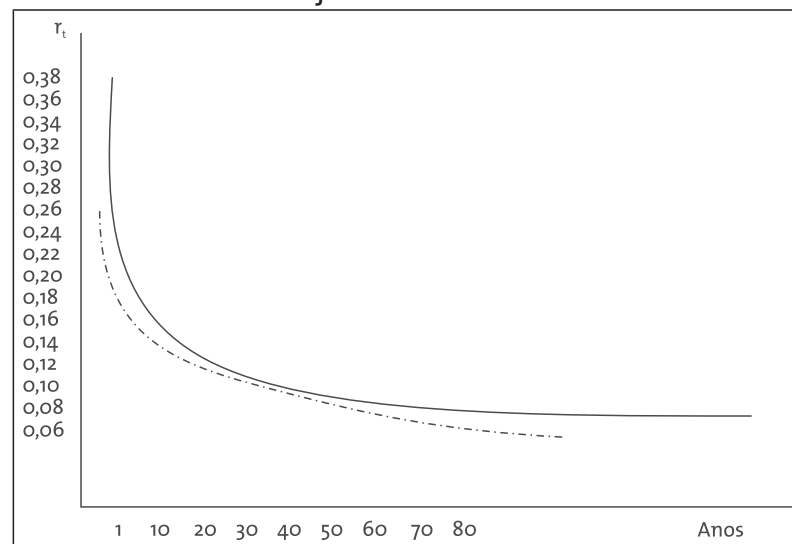
Fonte: Elaboração própria.

¹⁷ A taxa de juros elevada é uma decorrência natural do modelo neoclássico. Para ver isso, recorre-se a um pequeno exemplo. Para tal, usa-se a função Cobb-Douglas, $f(k) = k^\alpha$, em que a condição do equilíbrio estacionário, $sf(k^*) = \delta k^*$, se tornaria $sk^\alpha = \delta k$, que resulta em: $k^* = (s/\delta)^{1/(1-\alpha)}$. O nível de produto do equilíbrio estacionário seria: $y^* = f(k^*) = (s/\delta)^{\alpha/(1-\alpha)}$. Note-se que, caso se considere $\alpha = 1/3$ e $\delta = 0,05$ (5%) e $s = 0,2$ (20%), o estoque de capital seria 1,5 vezes o número de trabalhadores e a taxa de juros real seria $r = f'(k) - \delta$, ou $r = \alpha k^{\alpha-1} - \delta = 0,45$ ou 45%, uma taxa extremamente elevada.

Deve-se olhar com cautela os resultados de King e Rebelo, pois existe ainda uma possibilidade promissora não explorada por eles, que é a introdução do capital humano. Essa possibilidade poderia fornecer resultados mais razoáveis, pois se introduziria uma variável de escolha a mais para os agentes, a parcela de seu tempo que eles irão dedicar à sua formação, o que vai influenciar o produto e, portanto, a produtividade marginal do capital. Pode-se fazer isso mantendo o modelo de crescimento exógeno e guardando as propriedades assintóticas do modelo neoclássico. Isso será explorado no restante do trabalho.

Gráfico 10

Modelo de base – taxa de juros real



Fonte: Elaboração própria.

A acumulação de capital humano e o modelo de Lucas (1988)

Os modelos de capital humano têm uma história muito longa, mas ganharam definitivamente projeção quando esse tema foi retomado por

Lucas (1988). O autor atribui grande importância ao capital humano e destaca o papel primordial da educação no processo de acumulação. Lucas argumenta que se pode ter rendimento de escalas constantes nos insumos que são acumulados, acrescentando que todos os insumos podem ser acumulados, incluindo o que está relacionado ao fator trabalho. Portanto, ele inclui o capital humano na função de produção, em vez do trabalho em si (horas de trabalho ou simplesmente mão de obra não qualificada). O capital humano pode mudar com investimento em educação (os indivíduos podem escolher quanto de seu tempo irão dedicar aos estudos) e assim existe acumulação nos dois insumos da função de produção e não somente no capital físico, como no modelo de Solow-Sato e na versão de Ramsey-Cass-Koopmans. Tudo o que é necessário para gerar o crescimento é ter algum tipo de incentivo a investir no capital humano, o que torna esse fator não decrescente. Dito de outra forma, o autor postula uma função de produção que tem rendimentos constantes de escala, de forma que seja constante o seu produto marginal (que representa o incentivo para despendar seu tempo estudando).

Lucas considera uma economia fechada com mercados competitivos e uma população N_t no instante t , em que os agentes são todos idênticos e racionais. A população cresce a uma taxa constante ζ_N . Seja c_t um fluxo de consumo *per capita* de um único bem, que pode ser consumido ou investido. As preferências são descritas pela função:

$$U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M_{t+j}^{\nu} U \left(\frac{C_{t+j}}{M_{t+j}} \right) \quad (34)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j N_{t+j} \frac{1}{1-\sigma} [c_{t+j}]^{1-\sigma} \quad (35)$$

Seja h_t o nível individual de capital humano de um trabalhador típico. Ele representa um índice de eficiência do trabalho diretamente relacionado à educação e, por conseguinte, ao tempo consagrado ao estudo. Para um número N_t de trabalhadores empregados na produção de bens físicos, corresponde uma quantidade $H_t = h_t N_t$ de capital humano. É essa quantidade que entra como insumo na função de produção. Considere-se agora a produção de capital humano. Caso se desconsidere a existência de externalidades advindas do capital físico, pode-se escrever a acumulação de capital humano como sendo:

$$h_{t+1} - h_t = G(1 - u_t)h_t \quad (36)$$

O indivíduo consagra uma parte de seu tempo, a parcela u de seu tempo de trabalho, às atividades de produção de bens e uma parte $1 - u_t$ à sua educação, que acabará se convertendo em melhor qualificação e aumento do indicador de eficiência h_t . A taxa de crescimento do capital humano depende do tempo dedicado à formação, segundo uma função de produção de capital humano G que tem rendimentos de escala constantes, isto é, a taxa de crescimento do estoque de conhecimento é proporcional ao tempo que ele passou estudando, $1 - u_t$. Se nenhum esforço for dedicado ao capital humano, ou seja, $u_t = 0$ e não se acumula capital humano. Se todo o tempo do trabalhador for consagrado ao capital humano, u_t cresce a uma taxa máxima.

O produto Y dessa economia (definido como produto nacional líquido) tem a seguinte especificação:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha (u_t h_t N_t)^{1-\alpha} \quad (37)$$

onde Y_t denota o produto, K_t denota o capital físico, N_t é o insumo trabalho (em homens-hora), u_t é o esforço devotado à acumulação de capital físico, h_t é o nível de técnica (um índice de eficácia), α é a participação do capital físico na função de produção ($0 < \alpha < 1$) e A_t é o nível do parâmetro tecnológico consubstanciado em um fator de escala (neutra à la Harris). Essa é uma função de produção

agregada com retornos constantes de escala, em que o termo $u_t h_t N_t$ é frequentemente chamado de capital humano. Pode-se considerar que o modelo de King e Rebelo trabalha com um caso particular do modelo mais geral, ou seja:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha (u_t h_t X_t M_t)^{1-\alpha} \quad (38)$$

exceto pelo fato de que, no modelo de Lucas, u_t e h_t são endógenos, enquanto no modelo de King e Rebelo esses fatores são supostos de serem exógenos e fixados como sendo iguais à unidade. A acumulação de capital tem a formulação tradicional por meio de uma equação a diferenças para a acumulação de capital que mostra que a evolução do investimento pode ser descrita como segue:

$$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta_K K_t \quad (39)$$

onde δ_K é a taxa de depreciação do capital.

Especificou-se a equação em diferenças para a acumulação de capital humano *à la* Lucas (1988) com uma ligeira, mas fundamental, diferença:

$$h_{t+1} - h_t = \phi h_t^{1-\varepsilon} (1 - u_t)^\varepsilon - \delta_h h_t \quad (40)$$

onde δ_h é a taxa de depreciação do capital humano. Essa equação postula uma tecnologia relacionando o crescimento do capital humano ao nível já atingido e o esforço devotado à aquisição de mais capital humano.¹⁸

¹⁸ $\frac{h_{t+1} - h_t}{h_t} = \phi (1 - u_t)^\varepsilon h_t^{-\varepsilon} = \varsigma_h \rightarrow 0$ à medida que h cresce, a taxa de crescimento do capital humano se aproxima de zero e, portanto, essa formulação guarda as propriedades assintóticas do modelo de crescimento exógeno sem capital humano. No estado estacionário, como h_t é um índice que mede a eficiência, esse pode ser normalizado à unidade ($h^* = 1$), e também como o consumo não cresce mais no estado estacionário, $u^* = 1$, ou seja, os indivíduos não dedicam mais tempo à sua formação e então o modelo se torna equivalente ao de King e Rebelo. É simples notar que, se h tende para um, tem-se:

Na formulação deste artigo, existem retornos decrescentes na acumulação de capital. Como $u_t \geq 0$, a relação (40) implica que a taxa de crescimento de capital humano deverá eventualmente tender a uma constante quando h_t cresce, independentemente de quanto esforço é devotado à sua acumulação. Essa formulação simplesmente complica o modelo original de Solow, mas preserva as mesmas propriedades do modelo neoclássico de crescimento exógeno. Portanto, neste trabalho supõe-se que existem rendimentos decrescentes de escala, enquanto Lucas trabalha com rendimentos constantes de escala para o capital humano. A taxa de depreciação de capital δ_h foi fixada em 0,08, sendo u a variável de escolha que mede o esforço dedicado à produção de capital físico. O parâmetro ε se situa entre 0 e 1, o que quer dizer que, à medida que h cresce no decorrer do tempo, o modelo se aproxima do modelo de crescimento neoclássico (crescimento exógeno). A equação adicional do modelo é a restrição de recursos sobre o consumo e o investimento:

$$Y_t = C_t + I_t \quad (41)$$

Da mesma forma que os modelos anteriores, aqui supõe-se que há um crescimento constante na produtividade, com a produtividade fixada de forma exógena e com uma taxa de crescimento da mão de obra constante e exógena:

$$N_t = \varsigma_N N_{t-1} \quad (42)$$

$$X_t = \varsigma_X X_{t-1} \quad (43)$$

A poupança é determinada por uma função de utilidade em que as preferências são:

$$U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j N_{t+j}^{\nu} U \left[\frac{C_{t+j}}{N_{t+j}} \right] \quad (44)$$

onde β é o fator de desconto, N é a população e v é um parâmetro que reflete a avaliação da população futura. A utilidade *per capita*, $U(c_t)$, tem a forma de uma função com elasticidade constante:

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad 0 < \sigma < 1 \text{ ou } \sigma > 1 \quad (45)$$

Transformou-se a economia em uma economia estacionária na qual a dinâmica é mais fácil de analisar dividindo todas as variáveis no sistema pelos componentes de crescimento $N_t X_t$, tal que $c_t = C_t / N_t X_t$, $k_t = K_t / N_t X_t$ etc. Essa economia se torna idêntica a uma “economia sem crescimento” com duas exceções. Primeiro, a equação da equação de acumulação (39) se torna :

$$\gamma_x \gamma_N k_{t+1} = (1 - \delta_K) k_t + i_t \quad (46)$$

Segundo, a transformação do consumo na especificação da forma funcional das preferências altera a taxa efetiva de preferência intertemporal, ou seja:

$$U = N_0^\eta X_0^{1-\sigma} \sum_{t=0}^{\infty} (\beta_*)^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad \text{para } \sigma \neq 1 \quad (47)$$

onde $\beta_* = \gamma_N \eta_X^{1-\sigma} \beta$ e $\beta_* < 1$ é requerido ao longo de todo o processo para garantir que a utilidade tenha tempo de vida finito. Pode-se transformar a função objetivo (47) por meio de uma escolha apropriada de X_0 e N_0 . Combinando todas essas equações e a função objetivo, forma-se o lagrangeano e pode-se escrever as condições de primeira ordem para a economia transformada:

$$\text{Max } U = \sum_{t=0}^{\infty} (\beta_*)^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad (48)$$

sujeito às condições:

$$\gamma_x \gamma_N k_{t+1} = (1 - \delta_K) k_t + i_t$$

$$h_{t+1} - h_t = \varphi h_t^{1-\varepsilon} (1 - u_t)^\varepsilon - \delta_h h_t$$

o que permite escrever :

$$\begin{aligned} L = & U(c_t) + \beta_* U(c_{t+1}) + \beta_*^2 U(c_{t+2}) + \beta_*^3 U(c_{t+3}) + \dots + \\ & \lambda_t \beta_* [y_{t+1} - c_{t+1} + (1 - \delta_K)k_{t+1} - \varsigma_N \varsigma_X k_{t+2}] + \\ & + \lambda_{t+1} \beta_*^2 [y_{t+2} - c_{t+2} + (1 - \delta_K)k_{t+2} - \varsigma_N \varsigma_X k_{t+3}] + \dots + \\ & \theta_t [h_t^{1-\varepsilon} \varphi (1 - u_t)^\varepsilon + (1 - \delta_h)h_t - h_{t+1}] + \\ & + \theta_{t+1} [h_{t+1}^{1-\varepsilon} \varphi (1 - u_{t+1})^\varepsilon + (1 - \delta_h)h_{t+1} - h_{t+2}] + \dots \end{aligned}$$

Pode-se daí derivar as condições de primeira ordem:¹⁹

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = U'(c_t) - \lambda_t = 0 \Rightarrow c_t^{-\sigma} = \lambda_t \quad (49)$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t \varsigma_N \varsigma_X + \beta_* \lambda_{t+1} [\alpha k_t^{\alpha-1} (u_t h_t)^{1-\alpha} + (1 - \delta_k)] = 0 \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial h_{t+1}} = & \beta_* \lambda_t [(1 - \alpha) k_{t+1}^\alpha u_{t+1}^{1-\alpha} h_{t+1}^{-\alpha}] - \theta_t + \\ & + \theta_{t+1} \beta_* [(1 - \varepsilon) h_{t+1}^{-\varepsilon} \varphi (1 - u_{t+1})^\varepsilon + (1 - \delta_h)] = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = y_t - c_t + (1 - \delta_K)k_t - \varsigma_N \varsigma_X k_{t+1} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_t} = \varphi (1 - u_t)^\varepsilon h_t^{1-\varepsilon} + (1 - \delta_h)h_t - h_{t+1} = 0 \quad (53)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \lambda_t (1 - \alpha) k_t^\alpha h_t^{1-\alpha} u_t^{-\varepsilon} - \theta_t \varphi (1 - u_t)^{\varepsilon-1} h_t^{1-\varepsilon} = 0 \quad (54)$$

¹⁹ $y_t = k_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha}$; $y_{t+1} = k_{t+1}^\alpha (u_{t+1} h_{t+1})^{1-\alpha}$

Esse sistema de equações a diferenças permite obter as equações dinâmicas para o capital físico (k_t) e para o capital humano (h_t) e os seus *shadow prices* λ_t e θ_t , respectivamente:

$$c_t^{-\sigma} = \lambda_t \quad (50')$$

$$\beta_* \lambda_t \left[(1-\alpha) k_{t+1}^\alpha u_{t+1}^{1-\alpha} h_{t+1}^{-\alpha} \right] + \theta_{t+1} \beta_* \left[(1-\varepsilon) h_{t+1}^{-\varepsilon} \varphi (1-u_{t+1})^\varepsilon + (1-\delta_h) \right] = \theta_t \quad (51')$$

$$\lambda_t \varsigma_N \varsigma_X = \beta_* \lambda_{t+1} \left[\alpha k_t^{\alpha-1} (u_t h_t)^{1-\alpha} + (1-\delta_k) \right] \quad (52')$$

$$k_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha} = c_t + (1-\delta_k) k_t - \varsigma_N \varsigma_X k_{t+1} \quad (53')$$

Note-se que nesse caso, diferentemente de King e Rebelo, há duas variáveis de escolha (c_t e u_t). King e Rebelo tomaram u_t como fixo e igual à unidade, enquanto neste artigo supõe-se que, em vez disso, u_t é definido de forma endógena. A equação (50') dá a evolução do consumo ao longo do tempo, a equação (52') dá a evolução do *shadow price* do capital físico (λ_t), a equação (51') dá a evolução do *shadow price* do capital humano (θ_t) e a equação (53') dá a evolução do capital humano (h_t). Deve-se levar em conta também as condições terminais expressas pelas condições de transversalidade para o capital físico e o capital humano:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\beta_*) \lambda_t k_{t+1} = 0 \quad (54')$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\beta_*) \theta_t k_{t+1} = 0 \quad (55')$$

onde λ_t é o valor presente do multiplicador de lagrange associado ao capital físico e θ_t é o valor presente do multiplicador de lagrange associado com o capital humano. As relações (50')-(53') devem valer para todo $t = 1, 2, \dots, \infty$ e (54')-(55) são as condições terminais. O estoque inicial de capital da economia k_0 e h_0 são dados. Como

se consideram trajetórias de equilíbrio que emergem da otimização intertemporal, ou seja, depois de resolver analiticamente o modelo chega-se a um sistema de equações a diferenças no estoque de capital físico, no estoque de capital humano, no *shadow price* do estoque de capital físico e no *shadow price* do preço do capital humano. Sob nossas suposições sobre as preferências e do conjunto de possibilidades de produção, as condições (50)-(55) são necessárias e suficientes para um ótimo. Para resolver esse sistema de equações, usa-se o *software* GAMS.

A calibração do modelo

Ao estudar a dinâmica de transição sob previsão perfeita, o procedimento deste trabalho segue o modelo proposto por King e Rebelo (1993). Normaliza-se o nível do parâmetro A de tecnologia à unidade e escolhe-se o parâmetro de participação do capital físico no valor adicionado, α , como sendo igual a $2/3$, o que está de acordo com estimativas internacionais. Escolhe-se a taxa de depreciação para o capital físico como sendo igual a $0,1$ e a taxa de depreciação para o capital humano como sendo igual a $0,08$. Exige-se durante a simulação que a taxa de juro real do equilíbrio estacionário seja igual a $6,5\%$ a.a. A taxa de crescimento populacional foi fixada em $1,024\%$ ao ano. Para escolher k_0 e h_0 , fixou-se o capital *per capita* no instante zero como sendo igual a $1/7$ do seu nível de equilíbrio estacionário. Como King e Rebelo, supõe-se que, se a dinâmica de transição é totalmente completada, será responsável por metade do crescimento do produto *per capita* que se tornou sete vezes maior nos últimos cem anos. Isso implica fazer com que $F(k^*, u^* h^*) / F(k_0, u_0 h_0) = 7$. Assim sendo, a dinâmica de transição e o progresso técnico juntos geram um nível de produto que é, no equilíbrio estacionário, sete vezes maior que no instante zero. Fixou-se o valor de u^* em $0,99$, o que significa que no estado estacionário o esforço dedicado à produção de capital

físico é de 99% e que os indivíduos devotam 1% do seu tempo para a acumulação de capital humano (só o suficiente para compensar pela depreciação do capital humano). Na realidade, caso u^* fosse fixado em 1, haveria uma solução de canto, o que criaria problemas adicionais para a resolução numérica do problema sem acrescentar nada de novo à intuição do modelo.

Pode-se calcular o par (k_o, h_o) que satisfaz esse crescimento do produto especificado anteriormente. A condição fixada sobre a taxa de juros real determina o estoque de capital físico no equilíbrio estacionário e então se pode calcular o par (k_o, h_o) como uma função de seus próprios valores no equilíbrio estacionário. O parâmetro que mede o retorno constante de escala na função de produção (ε) é fixado em 0,5. Não se encontrou qualquer estimativa para esse parâmetro na literatura. O parâmetro Φ foi fixado em 0,6 e para ambos os parâmetros foram escolhidos outros valores, com as conclusões gerais mantidas. Para resolver numericamente esse problema, usou-se a rotina MINOS disponível no programa GAMS desenhado para resolver esse tipo de problema.

Resultados da simulação

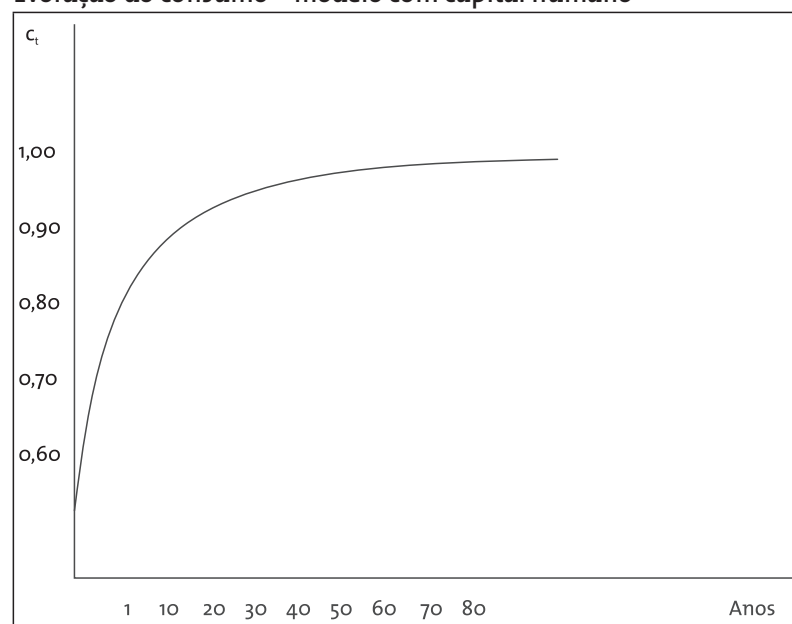
Supõe-se inicialmente que a economia se encontra em um equilíbrio estacionário e de repente em $t = 0$ o estoque de capital (físico e humano) é reduzido (pelas condições antes citadas). O resultado é que a posição em que se encontra a economia não representa mais um equilíbrio. Uma vez que já se resolveu analiticamente o problema, usam-se as condições de primeira ordem (50)-(55) como sendo o sistema de equações que permitirá reconstruir a evolução até que se atinja novamente o equilíbrio estacionário. GAMS vai resolver numericamente o problema encontrando os valores que satisfaçam as restrições para cada instante t .

Os gráficos 11, 12, 13, 14 e 15 fornecem as informações de base sobre a dinâmica da transição do modelo neoclássico com a introdução

do capital humano. Mostram-se a evolução do consumo (Gráfico 11), o estoque de capital físico (Gráfico 12), o produto (Gráfico 13), a evolução do estoque de capital humano (Gráfico 14) e a taxa de juros real (Gráfico 15), resumindo os resultados encontrados. Todas as variáveis foram deflacionadas por X e seus valores no equilíbrio estacionário foram normalizados à unidade.

Gráfico 11

Evolução do consumo – modelo com capital humano



Fonte: Elaboração própria.

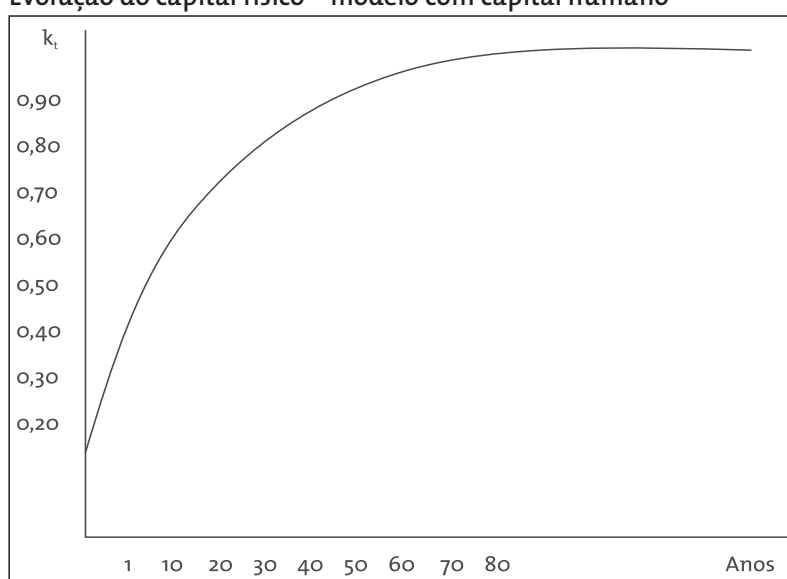
O consumo sobe de maneira monotônica, mas a taxas decrescentes, o que era esperado em decorrência da função de utilidade do tipo CRRA, que tem elasticidade de substituição constante.

A taxa de crescimento do produto é, no início, elevada, mas depois se reduz. O mesmo fato pode ser observado para o estoque de capital

físico. Há, portanto, a mesma dinâmica observada anteriormente, ou seja, no caso sem capital humano. A convergência é assegurada, estável e única. A evolução do estoque de capital humano também é convergente em direção ao equilíbrio estacionário, equilíbrio esse estável e único.

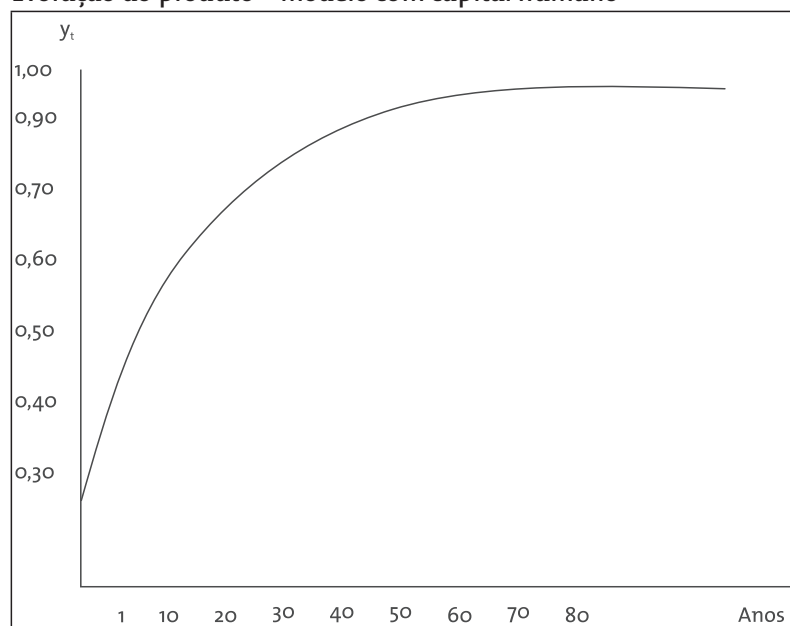
Gráfico 12

Evolução do capital físico – modelo com capital humano



Fonte: Elaboração própria.

Gráfico 13
Evolução do produto – modelo com capital humano

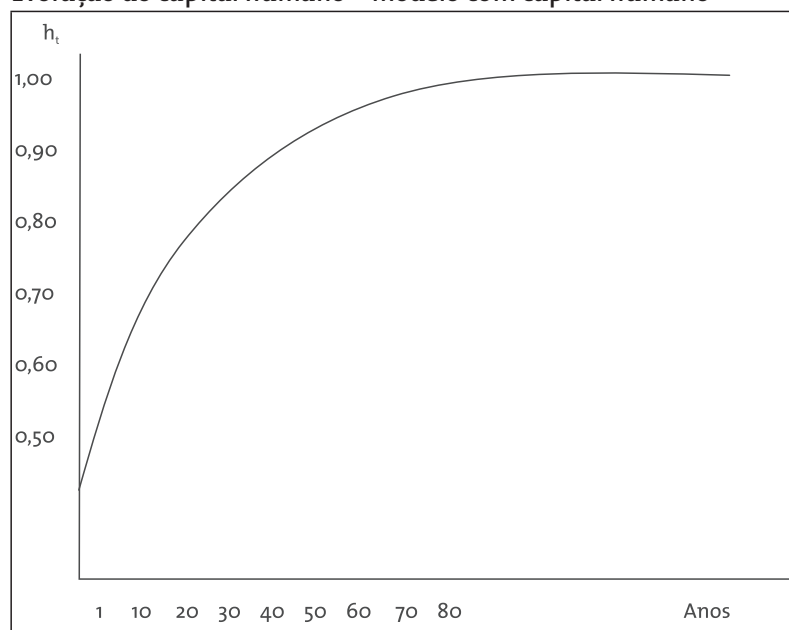


Fonte: Elaboração própria.

Entretanto, a maior diferença entre os resultados pode ser observada no Gráfico 15, que mostra a evolução da taxa de juros real. Aqui, contrariamente ao modelo de King e Rebelo, que obtiveram taxas de juros reais absurdamente elevadas e incompatíveis com a história do início do século XIX, as taxas de juros reais obtidas são bastante razoáveis (da ordem de 15% a.a.) enquanto no trabalho de King e Rebelo obtinham-se taxas de 105% a.a., e em nossa replicação dos resultados deles obtivemos taxas da ordem de 38% a.a. Portanto, a introdução do capital humano resolveu o problema de uma taxa de juros real tão elevada no início do processo de crescimento, o que era a intenção inicial deste trabalho.

Gráfico 14

Evolução do capital humano – modelo com capital humano



Fonte: Elaboração própria.

Mas qual seria a explicação para esse resultado? Antes da introdução do capital humano, deve-se lembrar que a função de produção era somente dependente do estoque de capital físico e da mão de obra não qualificada:

$$Y_t = F(K_t, N_t X_t) \quad (56)$$

Mantendo-se X_t e N_t fixos, a função de produção é tipicamente côncava, mostrando rendimentos marginais positivos, mas decrescentes

em relação ao fator K_t que se acumula.²⁰ Isso resulta em um formato de curva de produto marginal conhecido. Como a taxa de juros real é definida como o produto marginal do capital, tem-se que:

$$\frac{\partial F(K_t, N_t, X_t)}{\partial K_t} - \delta = r \quad (57)$$

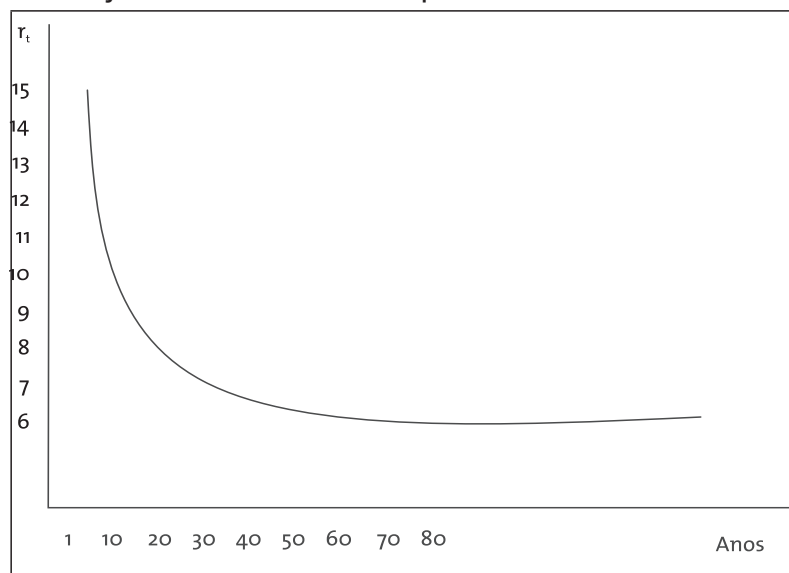
ou seja, a taxa de juros real tem o mesmo comportamento. Mas, como o estoque de capital no início do processo de crescimento é bastante raro (na realidade, em função da hipótese de King e Rebelo, no instante inicial equivale a 1/7 do nível de equilíbrio estacionário), vê-se que a produtividade marginal do capital físico é, portanto, muito elevada (Gráfico 16). Assim, a taxa de juros real é elevada, como reflexo da raridade do capital físico, do que decorre sua elevada produtividade marginal. À medida que o processo de acumulação de capital acontece, o estoque de capital aumenta e a sua produtividade marginal cai.

Por outro lado, se for introduzido outro tipo de capital – o capital humano –, a relação se modifica. A curva do produto marginal do capital ainda mostra rendimentos decrescentes, mas a taxa de juros real no início, que é a produtividade marginal do capital físico, se torna mais baixa. Ora, se essa é muito elevada em relação à produtividade marginal do capital humano, os indivíduos vão aumentar u (tempo que os indivíduos dedicam à produção e à acumulação física de capital) e, com isso, a acumulação e a produção de capital humano caem (menos tempo consagrado para o estudo, por exemplo, e mais tempo para a produção de bens).

²⁰ O produto marginal do capital tem as condições usuais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(K_t, N_t, X_t)}{\partial K_t} &> 0 \\ \frac{\partial^2 F(K_t, N_t, X_t)}{\partial K_t^2} &< 0 \end{aligned}$$

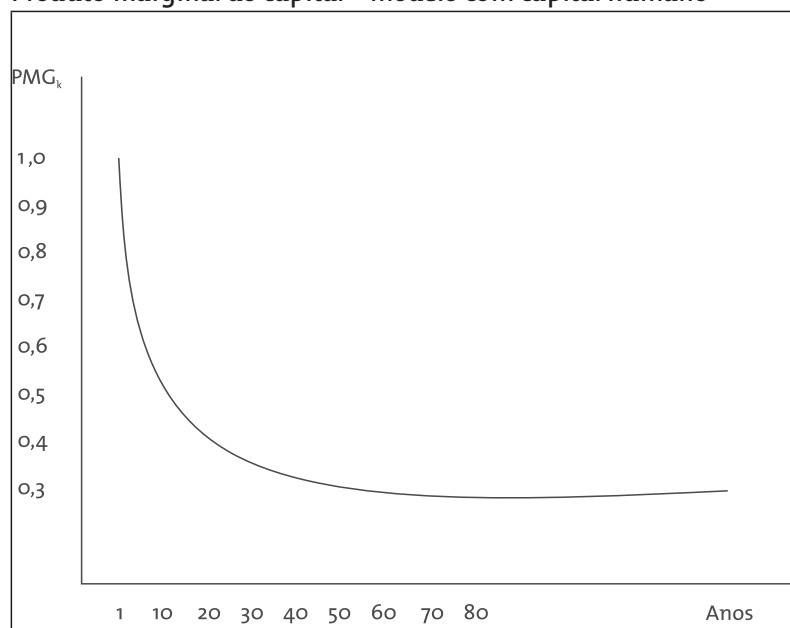
Gráfico 15
Taxa de juros real – modelo com capital humano



Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, a acumulação de capital físico faz crescer o estoque de capital físico e, portanto, o produto marginal do capital físico cai, enquanto o capital humano (que deixou de ser produzido em função da redução de u) se torna relativamente mais raro. Essa raridade relativa do capital humano vai fazer com que o produto marginal do capital humano comece a crescer até o ponto em que esse se torna mais elevado que o produto marginal do capital físico. Isso fará com que as pessoas passem a consagrar mais tempo de novo ao estudo, com uma queda de u . Então o processo inverso ocorre.

Gráfico 16

Produto marginal do capital – modelo com capital humano

Fonte: Elaboração própria.

Portanto, com a introdução do capital humano, introduz-se passa a existir uma condição de arbitragem entre os dois tipos de capital, o que impede valores desmesurados para ambos os produtos marginais e, em particular, para o produto marginal do capital físico, que é a taxa real de juros. Resolve-se o problema de uma taxa de juros real elevada no início do processo do crescimento, observado nos modelos de Solow, Ramsey-Cass-Koopmans e, especificamente, em King e Rebelo. Para tanto, com base na formulação de Lucas (1988), introduz-se o capital humano, mas com uma função de produção com rendimentos decrescentes, ao contrário de Lucas, o que permite reproduzir o modelo neoclássico de crescimento exógeno à medida que h cresce no decorrer do tempo. Na realidade, o que se fez neste

trabalho foi *exogeneizar* o crescimento na formulação original do modelo de Lucas (1988), em que o crescimento era endógeno.

Conclusão

No presente artigo, foram reproduzidos, inicialmente, os experimentos de Sato (1964) e King e Rebelo (1993). Foram alcançados os mesmos resultados qualitativos que eles obtiveram. Algumas diferenças quantitativas obtidas podem ser atribuídas aos diferentes métodos numéricos utilizados.²¹

Mostrou-se que, em vez de dizer que o crescimento exógeno não serve para fornecer uma explicação adequada ao crescimento da economia, seja por causa da alta taxa de juros real gerada, seja por causa da velocidade de convergência (dinâmica de transição), é possível sugerir uma alternativa, qual seja, a introdução do capital humano que se mostra uma boa possibilidade a ser explorada. Para que serviu a introdução do capital humano? Ora, a introdução do capital humano faz com que o agente econômico escolha a cada período a parcela u de seu tempo que será destinada à produção de bens de consumo e a parcela que será destinada à educação e à produção de capital humano. Portanto, a escolha vai afetar o produto, a produtividade marginal do capital físico e, por conseguinte, a taxa de juros real. Com a introdução do capital humano e mantendo-se as características do modelo neoclássico de crescimento exógeno, passa-se a ter uma condição de arbitragem entre os dois tipos de capital: o capital físico e o capital humano. Essa condição de arbitragem permite reduzir a velocidade de convergência e gera taxas de juros reais mais razoáveis. Para guardar as propriedades assintóticas do modelo de crescimento exógeno, foram supostos rendimentos decrescentes de escala na função de

²¹ King e Rebelo utilizaram o método de tiros múltiplos (*multiple shooting*), enquanto este trabalho recorreu ao método das diferenças finitas. A diferença de técnicas de resolução numérica pode realmente causar diferenças nos resultados.

produção de capital humano, diferentemente de Lucas (1988), que supôs rendimentos constantes. Na realidade, isso parece totalmente intuitivo, ou seja, supor que o processo de crescimento seja explicado em parte pela acumulação de capital físico, em parte pela acumulação de capital humano. Nesse sentido, chegou-se à conclusão de que é absolutamente necessário levar em conta o capital humano para gerar dinâmicas de transição que possam explicar a convergência em direção ao estado estacionário de uma forma mais factual.

Apesar de resolvido o problema da taxa de juros real por meio de uma formulação que gerou taxas de juros reais mais razoáveis, a velocidade de convergência continua bastante elevada e permanece ainda uma questão a ser explorada. Uma possibilidade seria a introdução de custos de ajustamento do capital que permitiria diminuir essa velocidade de convergência. A questão seria saber se a introdução desses custos teria efeitos sobre as taxas de juros reais. Resta ainda essa possibilidade a ser tentada.

Referências

- AGHION, Philippe; HOWITT, Peter. A model of growth through creative destruction. *Econometrica*, v. 60, p. 323-51, mar. 1992.
- BARRO, Robert J.; SALA-I-MARTIN, Xavier. Convergence. *Journal of Political Economy*, v. 100, p. 223-51, abr. 1992.
- _____. *Economic growth*. Nova York: McGraw-Hill, 1995.
- BLANCHARD, Olivier J.; FISCHER, Stanley. *Lectures on macroeconomics*. Cambridge, MA: MIT Press, 1989.
- BROCK, William A. Comments. In: INTRILIGATOR, M.; KENDRICK, D. A. (eds.). *Frontiers of quantitative economics*, v. II. Amsterdam: North Holland, 1974(a).
- _____. Money and growth: the case of long-run perfect foresight. *International Economic Review*, v. 15, p. 750-77, 1974(b).

- BROCK, William A.; MIRMAN, Leonard J. Optimal economic growth and uncertainty: the discounted case. *Journal of Economic Theory*, v. 4, p. 479-513, jun. 1972.
- CASS, David. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies*, v. 32, p. 233-40, 1965.
- CHO, Dongchul; GRAHAM, Stephen. The other side of conditional convergence. *Economics Letters*, v. 50, p. 285-90, fev. 1996.
- DENISON, Edward F. *Why growth rates differ*. Washington, D.C.: The Brookings Institution, 1967.
- DOMAR, Evsey. Expansion and employment. *American Economic Review*, v. 37, p. 343-55, 1947.
- GOODFRIEND, Marvin; McDERMOTT, John. Early development. *American Economic Review*, v. 85, p. 116-33, mar. 1995.
- GROSSMAN, Gene M.; HELPMAN, Elhanan. Endogenous innovation in the theory of growth. *Journal of Economic Perspectives*, v. 8, p. 23-44, 1994.
- _____. *Innovation and growth in the global economy*. Cambridge, MA: MIT Press, 1991.
- HAHN, Frank H. Neoclassical growth theory. In: EATWELL, John; MILGATE, Murray; NEWMAN, Peter (eds.). *The New Palgrave: a dictionary of economics*, v. 3. Nova York: Stockton Press, 1987.
- HARROD, R. F. An essay in dynamic theory. *Economic Journal*, v. 49, p. 14-33, 1939.
- ISLAM, Nazrul. Growth empirics: a panel data approach. *Quarterly Journal of Economics*, v. 110, p. 1127-70, nov. 1995.
- JONES, Charles I. Time series tests of endogenous growth models. *Quarterly Journal of Economics*, v. 110, p. 495-525, mai. 1995.
- KING, Robert G.; LEVINE, Ross. Finance, entrepreneurship, and growth. *Journal of Monetary Economics*, v. 32, p. 513-42, dez. 1993.

KING, Robert G.; REBELO, Sergio. Transitional dynamics and economic growth in the neoclassical model. *American Economic Review*, v. 83, p. 908-31, set. 1993.

_____. Public policy and economic growth: developing neoclassical implications. *Journal of Political Economy*, v. 98, p. S126-S150, out. 1990.

KOOPMANS, Tjalling C. On the concept of optimal economic growth. In: PONTIFICIA ACCADEMIA DELLE SCIENZE. *Study week on the econometric approach to development planning*. Amsterdam: North-Holland, 1965.

LEVINE, Ross; RENELT, David. A sensitivity analysis of cross-country growth regressions. *American Economic Review*, v. 82, p. 942-63, set. 1992.

LUCAS, Robert E., Jr. Why doesn't capital flow from rich to poor countries? *American Economic Review Papers and Proceedings*, v. 80, p. 92-96, mai. 1990.

_____. On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, v. 22, p. 3-42, jul. 1988.

MANKIW, N. Gregory. The growth of nations. *Brookings Papers on Economic Activity*, 1:1995, p. 275-310 e 324-26.

MANKIW, N. Gregory; ROMER, David; WEIL, David N. A contribution to the empirics of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, v. 107, p. 407-37, mai. 1992.

MCCALLUM, Bennett T. Macroeconomics after two decades of rational expectations. *Journal of Economic Education*, v. 25, p. 219-34, 1994.

_____. Inflation: theory and evidence. In: FRIEDMAN, Benjamin M.; HAHN, Frank H. (eds.). *Handbook of monetary economics*, v. II. Amsterdam: North-Holland, 1990.

_____. Real business cycle models. In: BARRO, Robert J. (ed.). *Modern business cycle theory*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1989.

- MEADE, James E. *A neoclassical theory of economic growth*. Londres: Allen & Unwin, 1962.
- MULLIGAN, Casey B.; SALA-I-MARTIN, Xavier. Transitional dynamics in two-sector models of endogenous growth. *Quarterly Journal of Economics*, v. 108, p. 739-73, ago. 1993.
- PHELPS, Edmund S. The golden rule of accumulation: a fable for growth-men. *American Economic Review*, v. 51, p. 638-43, 1961.
- RAMSEY, Frank P. A mathematical theory of saving. *Economic Journal*, v. 38, p. 543-49, 1928.
- REBELO, Sergio. Long-run policy analysis and long-run growth. *Journal of Political Economy*, v. 99, p. 500-21, jun. 1991.
- RIVERA-BATIZ, Luis A.; ROMER, Paul M. Economic integration and endogenous growth. *Quarterly Journal of Economics*, v. 106, p. 531-55, mai. 1991.
- ROMER, Paul M. The origins of endogenous growth. *Journal of Economic Perspectives*, v. 8, p. 3-22, 1994.
- _____. Endogenous technological change. *Journal of Political Economy*, v. 98, p. S71-S102, out. 1990.
- _____. Capital accumulation in the theory of long-run growth. In: BARRO, Robert J. (ed.). *Modern business cycle theory*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1989.
- _____. Crazy explanations for the productivity slowdown. In: FISCHER, Stanley (ed.). *NBER Macroeconomics Annual 1987*. Cambridge, MA: MIT Press, 1987.
- _____. Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, v. 94, p. 1002-37, out. 1986.
- SALA-I-MARTIN, X. *Lecture notes on economic growth (i): introduction to the literature and neoclassical models*. National Bureau of Economic Research, 1990 (NBER Working Papers 3563).

- SATO, K. On the adjustment time in the neoclassical growth models. *Review of Economic Studies*, 33(2), p. 263-268, 1964.
- SOLOW, Robert M. A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, v. 70, p. 65-94, 1956.
- _____. Comment on the golden rule. *Review of Economic Studies*, v. 29, p. 255-57, 1962.
- _____. *Growth theory: an exposition*. Oxford: Clarendon Press, 1970.
- _____. Perspectives on growth theory. *Journal of Economic Perspectives*, v. 8, p. 45-54, 1994.
- SUMMERS, Robert; HESTON, Alan. A new set of international comparisons of real product and price levels estimates for 130 countries, 1950-1985. *Review of Income and Wealth*, v. 34, p. 1-25, mar. 1988.
- SWAN, Trevor W. Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, v. 32, p. 334-61, 1956.
- UZAWA, H. Optimal technical change in an aggregative model of economic growth. *International Economic Review*, v. 6, p. 18-31, 1965.
- _____. Neutral inventions and the stability of growth equilibria. *Review of Economic Studies*, v. 28, p. 117-24, 1961.
- WEITZMAN, Martin L. Duality theory for infinite horizon convex models. *Management Science*, v. 19, p. 783-89, mar. 1973.